

Misura della Massa della Terra dalla misura di g

La forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su di una massa m , sulla sua superficie, è:

$$F = G \frac{mM_T}{R_T^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M_T la massa della Terra, R_T il raggio terrestre.

Questa Forza è usualmente chiamata il “peso” della massa m e si scrive come: $F = m \cdot g$, dove g è l'accelerazione gravitazionale che vale quindi $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$, la massa M_T può quindi essere calcolata dalla relazione:

$$M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$$

Per calcolare la Massa della Terra servono quindi i valori delle tre grandezze G , R_T , g .

Tutte e tre le grandezze si possono misurare. Voi misurerete g , ed assumerete come noti i valori di G e R_T .

I valori da inserire nella formula per trovare la massa della Terra M_T sono:

$R_T = 6314$ km, misurato da Eratostene nel 240 a.C. (vedi alla fine)

$G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ S.I., misurato da H. Cavendish nel 1798 (vedi alla fine)

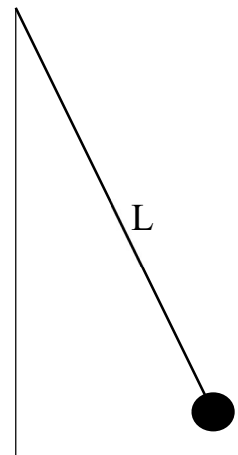
g = il valore misurato da voi, in unità del Sistema Internazionale [m/s²]

Misura di g utilizzando un pendolo – Teoria

Se considero un pendolo (una piccola massa collegata ad un filo fissato in alto) posto nel campo gravitazionale, posso calcolare, dalla legge di Newton e dall'espressione della forza di attrazione gravitazionale, che il sistema oscillerà, e che il suo periodo di oscillazione (approssimato) che sarà:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ dove L è la lunghezza del filo cui è appesa la massa e g l'accelerazione di gravità. Quadrando questa formula si ha il valore di $L = \frac{g}{(2\pi)^2} T^2$

Quindi il valore di g può essere calcolato tramite una serie di misure di L e di T .



Operazioni da fare (Misure)

- Creare il pendolo: la massa appesa al filo può essere fatta con due-tre grandi dadi legati insieme. Il filo dovrebbe essere abbastanza sottile e leggero, un filo da pesca va benissimo, altrimenti un filo da pacchi sottile, oppure un filo per cucire non sottilissimo. La lunghezza, che verrà cambiata dovrà andare da circa 30 cm fino a più di 1 metro. La lunghezza L che va inserita nella formula è la lunghezza del filo dal punto in cui è fissato in alto fino al centro (geometrico) della massa appesa.

- Se si sposta **delicatamente** la massa dalla posizione di equilibrio, e la si lascia andare, la massa comincia ad oscillare con un moto armonico di periodo T .

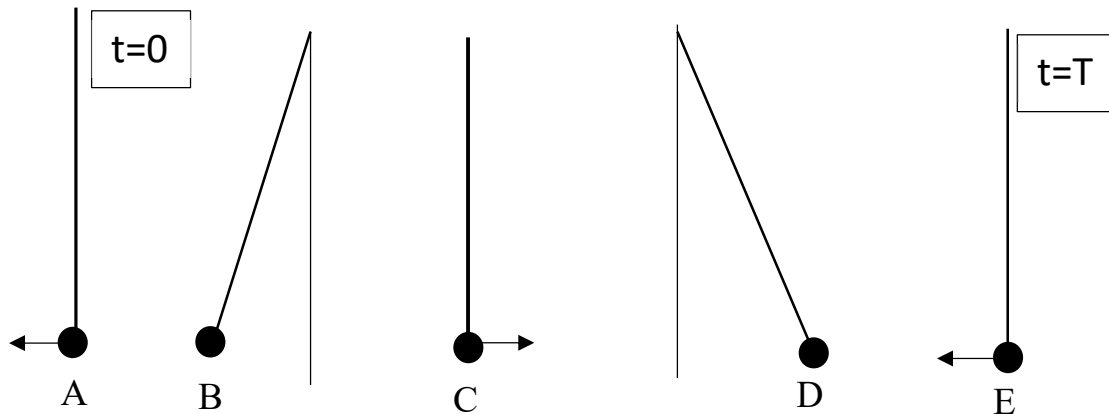
- Aspettare che faccia 2-3 oscillazioni per controllare che oscilli in maniera regolare, e poi fare la misura del Periodo prendendo la misura di 10 oscillazioni complete (T_{10}). Misurare molti periodi insieme, tipicamente 10 (ma possono essere anche 15 o 20).

- La misura del singolo periodo sarà $T = T_1 = T_{10}/10$. Ripetere la misura almeno tre volte, e farne la media aritmetica. L'incertezza da attribuire a questa misura è **la più grande** fra queste due incertezze:

1) Incertezza dovuta ai riflessi della persona $\Delta T_{10} \approx 0,2$ s per ogni misura di 10 periodi, per un periodo sarà $\Delta T_1 \approx 0,02$ s

2) Incertezza dovuta alla variabilità delle misure: si prende la misura maggiore $T_{\max}$ e la misura minore $T_{\min}$, l'incertezza sarà $\Delta T_1 \approx (T_{\max} - T_{\min})/2$

- Si ricordi che il periodo si ha quando il sistema torna in una certa posizione, con la velocità nella stessa direzione, nel caso mostrato sotto il periodo è il tempo necessario ad andare dalla posizione A...B...C....D.... fino a tornare in E=A



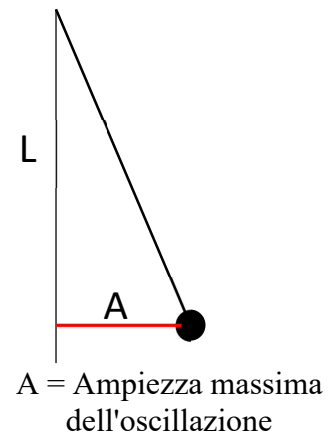
- L'oscillazione deve essere abbastanza piccola, solo in questo caso il pendolo è isocrono, cioè il periodo di una oscillazione non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione.

Cosa vuol dire "piccola"? Tipicamente si considera piccola una oscillazione minore di 10° .

Come si calcola? Vedi figura a lato:

L'oscillazione è "piccola" se $A < L \cdot 0,17$.

Quindi se per esempio $L = 45 \text{ cm}$, allora l'ampiezza massima A deve essere minore di $A = 45 \cdot 0,17 \cong 7,6 \text{ cm}$



Operazioni da fare (calcoli):

Utilizzando il valore di g misurato, quello di G e quello del raggio Terrestre R_T calcolare il valore della Massa della Terra.

Fare anche una valutazione dell'incertezza della misura, leggere la dispensa relativa.

La massa della terra è circa: $M_T \cong 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Ma non è detto che vi venga questo valore! Può essere un po' differente o molto differente. Se è molto differente cercate di capire perché.

Esempio (con valori inventati da me!!!!)

In questa prima prova si vede quanto devono essere "piccole" le oscillazioni.

Come si vede l'ampiezza massima dell'oscillazione dovrebbe essere inferiore a circa 15 cm per una lunghezza di 87 cm.

Questa prova se volete potete saltarla.

Lunghezza Pendolo, $L=87,0 \pm 0,4$ cm (l'incertezza è dovuta all'imprecisione con cui misuro la lunghezza della corda in cima ed in fondo, sono circa 2+2 mm).

	T10(s)	T10(s)	T10(s)	T10 media	T1 medio (s)	g(m/s ²)
Ampiezza grande - 30 cm	18,65	18,55	18,60	18,60	1,860	9,92785
Ampiezza Media - 15 cm	18,70	18,71	18,69	18,70	1,870	9,82195
Ampiezza piccola - 5 cm	18,69	18,72	18,73	18,71	1,871	9,80796

MISURA per il calcolo della Massa della Terra:

1) Si misurano varie volte (almeno 3) i periodi di 10 oscillazioni per alcuni valori (almeno 4) della lunghezza L.

Si costruisce una tabella come questa.

T1 (s)	T2 (s)	T3 (s)	10T(s)	T(s)	L (m)	T ² (s ²)
23,33	23,37	23,33	23,34	2,334	1,35	5,45
17,24	17,5	17,35	17,36	1,736	0,74	3,01
14,94	15	15	14,98	1,498	0,555	2,24
12,6	12,6	12,57	12,59	1,259	0,39	1,59

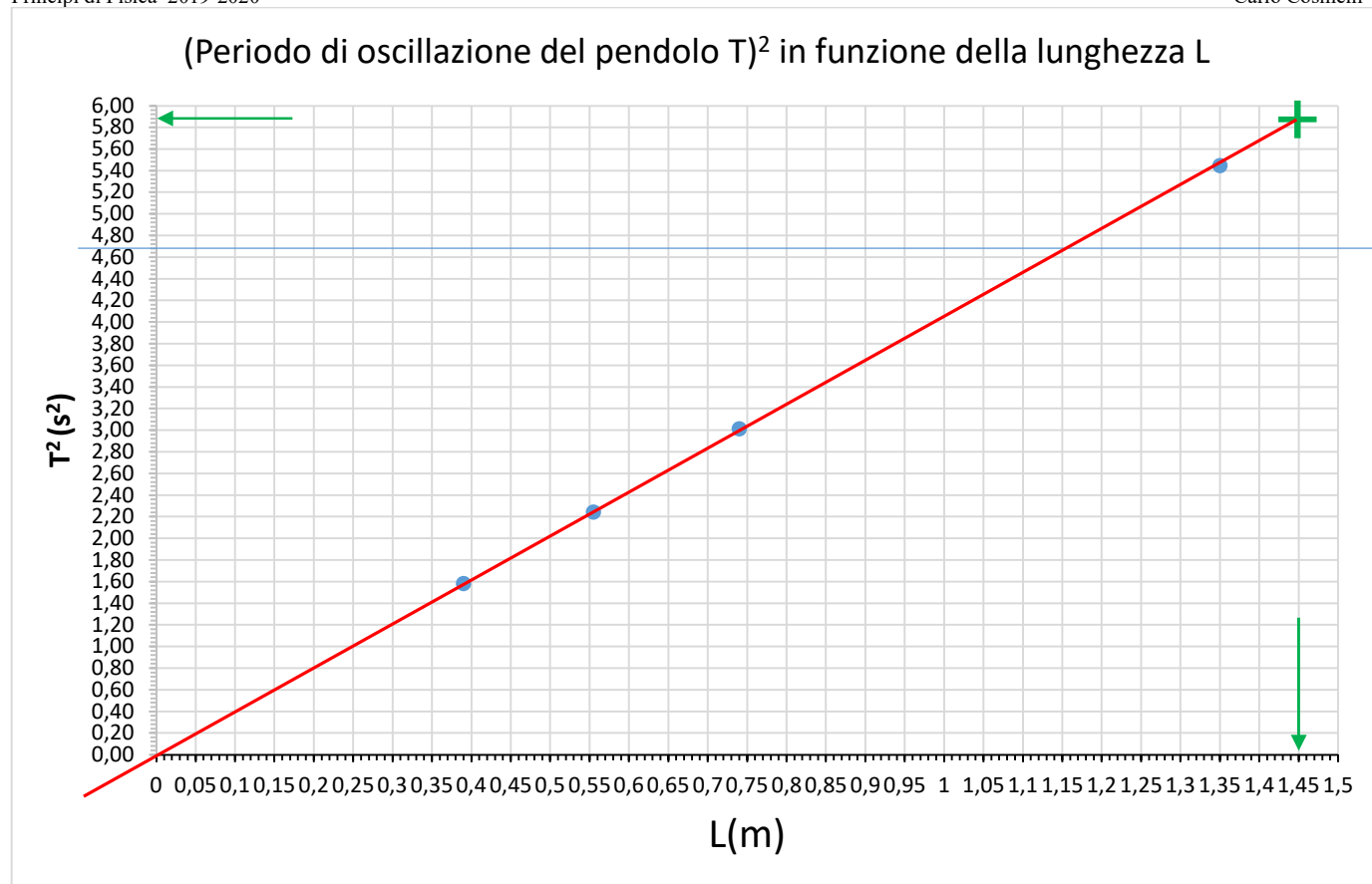
2) Si inseriscono i dati delle ultime due colonne (L e T²) in un grafico.

3) Si traccia ad occhio, con un righello, una retta che passa per lo 0, e per i punti sperimentali.

4) Si calcola la pendenza della retta scegliendo un punto della retta "comodo da leggere" il più grande possibile sulla scala del grafico, in questo caso ho scelto il punto di arrivo della retta, quello indicato con una croce verde:

Per questo punto ho i due valori in corrispondenza delle frecce verdi: $L= 1,45$ m ; $T^2= 5,84$ s²

5) il valore di g è quindi: $g = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot L = \frac{39,48}{5,84} \cdot 1,45 = 9,802 \text{ m/s}^2$



6) Questo valore si inserisce nella formula per la massa della Terra:

$$M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G} = \frac{9,80 \cdot (6314 \cdot 1000)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,86 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

... molto vicino al valore "vero". In questo caso non sono state valutate le incertezze. Da fare dopo.